

**Arjen Doelman**

Mathematisch Instituut  
Universiteit Leiden  
doelman@math.leidenuniv.nl

**Maarten Eppinga**

Research Group Environmental Sciences  
Universiteit Utrecht  
m.b.eppinga@uu.nl

**Geertje Hek**

Institut International de Lancy  
Genève  
g.m.hek@uva.nl

**Jens Rademacher**

Fachbereich 3 – Mathematik  
Universität Bremen  
jdmr@uni-bremen.de

**Max Rietkerk**

Research Group Environmental Sciences  
Universiteit Utrecht  
m.g.rietkerk@uu.nl

**Eric Siero**

Mathematisch Instituut  
Universiteit Leiden  
esiero@math.leidenuniv.nl

**Koen Siteur**

Research Group Environmental Sciences  
Universiteit Utrecht  
k.siteur@uu.nl

# Klimaatverandering, verwoestijning en biljart

Door geleidelijk veranderende omgevingsfactoren kunnen gezonde ecosystemen abrupt veranderen in woestijnen. Om dergelijke catastrofale veranderingen te begrijpen zijn conceptuele modellen geformuleerd voor het gedrag van vegetatiepatronen. Arjen Doelman, Maarten Eppinga, Geertje Hek, Jens Rademacher, Max Rietkerk, Eric Siero en Koen Siteur beschrijven de reactie-diffusievergelijkingen waaruit zulke modellen bestaan en analyseren de patronen die er in voorkomen. Onder toenemende ecologische stress, zoals verminderde regenval, is het mogelijk dat vegetatiepatronen destabiliseren tot alleen een woestijn als stabiele toestand overblijft.

Wereldwijd staan ecosystemen bloot aan veranderingen in bijvoorbeeld klimaat of landgebruik. Droge, maar ‘gezonde’, begroeide ecosystemen kunnen zich lange tijd aanpassen aan geleidelijke omgevingsveranderingen, maar vervolgens plotseling en op een meestal onomkeerbare manier veranderen in woestijn. Vaak wordt zo’n catastrofale verandering voorafgegaan door het ontstaan van vegetatiepatronen, die zowel een gestreept als een labyrintachtig karakter kunnen hebben (zie Figuur 1).

**Ecologische modellen en wiskundige vragen**

In de ecologie worden conceptuele modellen geformuleerd voor de mechanismen die ten grondslag liggen aan het langzaam ontstaan en abrupt verdwijnen van vegetatiepatronen. Zie Figuur 2 voor een conceptuele interpretatie van het verwoestijningsproces.

Een centrale vraag is of aan een vegetatiepatroon te zien is hoe dicht het systeem in de buurt van de verwoestijningscatastrofe is [16].

Het meest eenvoudige model is dat van Christopher Klausmeier [7]. Het is een reactie-diffusiemodel in twee componenten: water  $U$  en biomassa  $V$ . Het model beschrijft een systeem op een hellend terrein, met heuvelafwaarts stromend water gemodelleerd door de advectieterm  $CU_x$  in (1). Om ook vegetatiepatronen in vlakke gebieden te kunnen beschrijven, beschouwen we hier een generaliseerd Klausmeier–Gray–Scott-model (gKGS) [18]. Wij beperken ons tot patronen die maar van één ruimtelijke variabele  $x$  afhangen. In een tweedimensionale setting geeft voortzetting van periodieke patronen zonder verdere variatie in de  $y$ -richting streepvormige structuren [7]. Verder kiezen we  $x$  onbe-

grensd,  $x \in \mathbb{R}$ . Dit is een natuurlijke aanname binnen het vakgebied ‘pattern formation’, die aangeeft dat de schaal van de geobserveerde patronen veel kleiner is dan de domeingrootte. In herschaalde vorm ziet het gKGS-model er als volgt uit:

$$\begin{aligned} U_t &= (U^\gamma)_{xx} + CU_x + A(1 - U) - UV^2, \\ V_t &= \delta^2 V_{xx} - BV + UV^2. \end{aligned} \quad (1)$$

De subscripten  $x$  en  $t$  zijn de partiële afgeleiden naar  $x$  en  $t$ ; de parameter  $A$  representeert de (gemiddelde, jaarlijkse) regenval,  $B$  is een sterfteparameter voor de vegetatie en  $C$  is een maat voor de helling van het terrein. De niet-lineaire diffusie-term  $(U^\gamma)_{xx}$  modelleert de verspreiding van water in vlakke terreinen; zie [4, 18]. De waarde van  $\gamma$  is typisch 2, hoewel de lineaire keuze  $\gamma = 1$  ook voorkomt in de vegetatiepatronenliteratuur [6, 18]. De verhouding  $\delta$  tussen de (typische) diffusiesnelheden van de vegetatie en het water is vanzelfsprekend zeer klein, zodat het model op een natuurlijke manier een *singulier verstoord* karakter heeft. Er zijn meerdere veel realistischere modellen in de literatuur [15, 19], maar begrip van de dynamica van patronen in conceptuele modellen als (1) kan

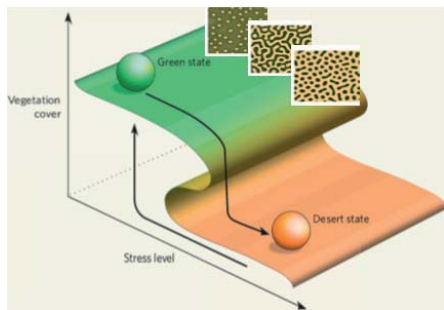


**Figuur 1** Streep- en labirynthvegetatiepatronen in de Sahel in Niger. De typische afstand tussen begroeide stukken terrein is in de orde van 10–100 m.

helpen inzicht te krijgen in wat er in het echt gebeurt. Vooral de grof versimpelde plant-water-interactietermen — de niet-lineariteiten  $UV^2$  — en het ontbreken van onderscheid tussen oppervlakte- en grondwater geven aan dat (1) inderdaad vooral gezien moet worden als fenomenologisch model. Ook andere belangrijke factoren in het verwoestijningsproces, zoals bijvoorbeeld de intensiviteit van de begrazing van de vegetatie, worden niet in dit model meegenomen.

Het gKGS-model reduceert tot het Klausmeier-model [7] in de limiet  $C \rightarrow \infty$  [18]. De gekozen schaling geeft aan hoe sterk het Klausmeier-model voor vegetatiepatronen gerelateerd is aan het al veel langer bekende Gray–Scott-model voor autocatalytische chemische reacties, dat ook in de wiskundeliteratuur uitgebreid bestudeerd is: (1) neemt de vorm van het Gray–Scott-model aan voor  $\gamma = 1$  en  $C = 0$  [2, 5, 11]. Merk op dat vanwege de niet-lineaire diffusieterm, de basisvraag naar existentie en uniciteit van oplossingen van (1) niet triviaal is [8].

In de context van het model correspondeert klimaatverandering met een langzame



**Figuur 2** Een globale schets van het verwoestijningsproces: de plotselinge catastrofe wordt voorafgegaan door zich langzaam vormende vegetatiepatronen. Zie ook [16].

verandering van de parameters. Vegetatiepatronen komen overeen met *stabiele*, ruimtelijk periodieke oplossingen in (1). In wiskundige termen komt het proces van verwoestijning dus overeen met het verdwijnen van periodieke patronen ten gevolge van langzaam variërende parameters. Er is een uitgebreide wiskundige literatuur over patronen — en met name het ontstaan ervan — in reactie-diffusievergelijkingen met *vaste* parameters. Hieronder volgt een schets van een aantal basisideeën, uitmondend in de introductie van de zogenaamde *Busse-ballon*. Deze Busseballon werd oorspronkelijk geïntroduceerd in de context van (hydrodynamische) convectie [1] en is een in het algemeen tamelijk complex gebied in (parameter, golfgetal)-ruimte waarin stabiele ruimtelijk periodieke oplossingen bestaan. Intuïtief betekent klimaatverandering, ofwel het variëren van parameter  $A$ , dat de dynamica van systeem (1) een baan zal beschrijven binnen deze Busse-ballon: verwoestijning komt overeen met het moment dat deze baan de Busse-ballon verlaat en ‘neerslaat’ in de triviale homogene oplossing  $(U(x, t), V(x, t)) \equiv (U^0, V^0) = (1, 0)$  van (1), die de kale woestijn voorstelt en een ‘sterke aantrekker’ is voor de dynamica van (1). Zowel het karakter van deze baan als het precieze moment waarop deze baan de Busse-ballon verlaat, geven aanleiding tot diepe, nog onbeantwoorde, wiskundige vragen.

**De existentie van patronen**

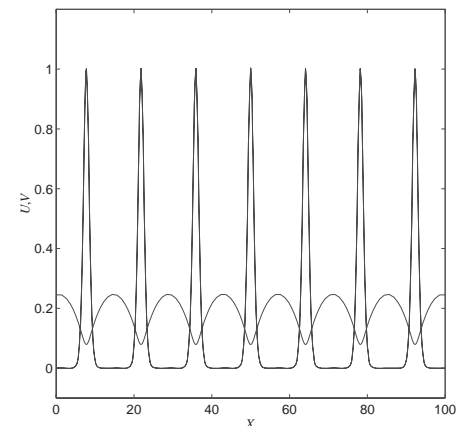
Het begrijpen van de dynamica van (1) begint met het bestuderen van eenvoudige patronen. De allereenvoudigste zijn de homogene evenwichten, tijds- en ruimteafhankelijke oplossingen van (1) van de vorm

$(U(x, t), V(x, t)) \equiv (U^*, V^*)$ . Buiten de genoemde ‘desert state’  $(U^0, V^0)$  zijn er nog twee oplossingen,

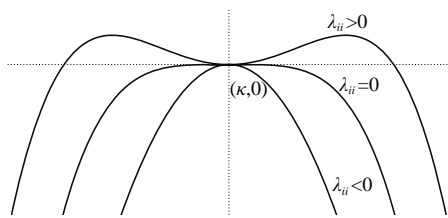
$$(U^\pm, V^\pm) = \left( \frac{A \mp \sqrt{A^2 - 4AB^2}}{2A}, \frac{A \pm \sqrt{A^2 - 4AB^2}}{2B} \right),$$

die twee verschillende homogeen begroeide situaties voorstellen. Voor  $A = A_{sn} = 4B^2$  vallen deze samen en verdwijnen in een zogenaamde zadel-knoop-bifurcatie. Voor  $A < A_{sn}$ , een kleine jaarlijkse regenval, is de woestijn dus de enige homogene oplossing; voor  $A > A_{sn}$  is er coëxistentie van drie verschillende homogene evenwichten.

Vegetatiepatronen komen overeen met (lopende) ruimtelijk periodieke oplossingen  $(U(x, t), V(x, t)) = (u^p(\xi), v^p(\xi))$ , waarbij  $\xi = x - ct$  een meebewegend coördinatenstelsel beschrijft (met snelheid  $c$ ), en  $(u^p, v^p)$  een periodieke oplossing is van de *gewone* differentiaalvergelijking (ODE) in  $\xi$  die je uit (1) krijgt door daarin  $(U, V) = (u(\xi), v(\xi))$  te substitueren. Zie Figuur 3 voor een representatie van  $(u^p(\xi), v^p(\xi))$  als functie van  $x$  (met  $c = 0$ ). Omdat deze ODE bestaat uit twee gekoppelde tweede-orde-vergelijkingen in  $\xi$  — één voor  $u$  en één voor  $v$  — definieert het een 4-dimensionaal dynamisch systeem; het periodieke patroon  $(u^p(\xi), v^p(\xi))$  correspondeert daarom met een gesloten kromme in een 4-dimensionale ruimte. Het aantonen van de existentie van dit soort banen is in het algemeen zeer moeilijk, maar het singuliere karakter van (1) geeft een meetkundige structuur die gebruikt kan worden om het bestaan van ‘vegetatiepatronen’  $(u^p(\xi), v^p(\xi))$  in (1) analytisch aan te tonen [2].



**Figuur 3** Een singulier, ruimtelijk periodiek vegetatiepatroon als oplossing van (1) met  $\gamma = 1, A = 0,02, B = 0,14, C = 0, \delta = 0,1$ . Het singuliere karakter van (1) is duidelijk uit de lokaal piekende  $V$ -component: tussen twee opeenvolgende vegetatiebanden is er geen of nauwelijks begroeiing.



Figuur 4 De sideband-instabiliteit

**Stabiliteit**

Dat een zeker patroon bestaat, betekent niet dat het ook waargenomen zal worden. Hiervoor is het noodzakelijk dat het *stabiel* is als oplossing van (1). Stabiliteit ‘meet’ of willekeurig kleine verstoringen van een patroon al dan niet de neiging hebben om te groeien. Is dat laatste het geval, dan noemt men het patroon *instabiel*, en zal het niet waargenomen kunnen worden, omdat er zowel in de natuur als in (numerieke) simulaties altijd verstoringen zijn. Wiskundig bepaalt men stabiliteit als volgt: men neemt een stationaire oplossing  $(U^*(\xi), V^*(\xi))$  van (1), met  $\xi$  gedefinieerd als hierboven, en voegt hier een kleine verstoring aan toe:

$$\begin{aligned} (U(x, t), V(x, t)) = \\ (U^*(\xi), V^*(\xi)) + \varepsilon(\tilde{U}(\xi, t), \tilde{V}(\xi, t)), \end{aligned} \quad (2)$$

waarbij  $0 < \varepsilon \ll 1$  ‘asymptotisch klein’ is. Als  $(\tilde{U}(\xi, t), \tilde{V}(\xi, t))$  begrensd blijft, of zelfs kleiner wordt, noemen we  $(U^*(\xi), V^*(\xi))$  *stabiel* en is het patroon dus waarneembaar: kleine verstoringen blijven klein, en de oplossing  $(U(x, t), V(x, t))$  van (1) blijft dicht bij  $(U^*(\xi), V^*(\xi))$  als de tijd  $t$  evolueert.

Om inzicht te krijgen in het (leidende-orde-) gedrag van de verstoring  $(\tilde{U}(\xi, t), \tilde{V}(\xi, t))$  substitueert men (2) in (1) en ontwikkelt naar  $\varepsilon$ . Omdat de basistoestand  $(U^*(\xi), V^*(\xi))$  oplossing is van de bijbehorende ODE-reductie, verdwijnen hierbij alle termen zonder voorfactor  $\varepsilon$ . Men kan dus een factor  $\varepsilon$  uitdelen en vervolgens de limiet  $\varepsilon \rightarrow 0$  nemen. Dit geeft het gelineariseerde systeem

$$\partial_t \begin{pmatrix} \tilde{U} \\ \tilde{V} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{L}_{11} & \mathcal{L}_{12} \\ \mathcal{L}_{21} & \mathcal{L}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{U} \\ \tilde{V} \end{pmatrix}, \quad (3)$$

waarin  $\mathcal{L}_{ij} = \mathcal{L}_{ij}(\partial_\xi; U^*(\xi), V^*(\xi))$   $\xi$ -afhankelijke, tweede-orde-operatoren zijn (voor  $i = j$ ) die expliciet afhangen van  $(U^*(\xi), V^*(\xi))$ . Omdat dit systeem lineair is, kan  $(\tilde{U}(\xi, t), \tilde{V}(\xi, t))$  met behulp van Fourier-theorie ontbonden worden in  $(\tilde{u}(\xi), \tilde{v}(\xi))e^{\lambda t}$ , zodat de vraag naar de stabiliteit van  $(U^*(\xi), V^*(\xi))$  reduceert tot het vinden van ‘eigenwaarden’

$\lambda \in \mathbb{C}$  van het spectrale probleem

$$\begin{pmatrix} \mathcal{L}_{11}(\frac{d}{d\xi}; \xi) & \mathcal{L}_{12}(\frac{d}{d\xi}; \xi) \\ \mathcal{L}_{21}(\frac{d}{d\xi}; \xi) & \mathcal{L}_{22}(\frac{d}{d\xi}; \xi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Als er  $\lambda$  bestaan met  $\Re(\lambda) > 0$  dan zijn er exponentieel groeiende verstoringen en is  $(U^*(\xi), V^*(\xi))$  dus instabiel.

In het algemeen zal het spectrum niet uit geïsoleerde eigenwaarden bestaan. Als  $(U^*(\xi), V^*(\xi))$  een homogeen evenwicht is, kan met behulp van een Fourier-transformatie (door middel van  $\mathcal{L}_{ij}(\frac{d}{d\xi}) = \mathcal{L}_{ij}(ik)$  met  $k \in \mathbb{R}$ ) de operatormatrix in (4) vervangen worden door een gewone (constante coëfficiënten)  $2 \times 2$  matrix. Het spectrum bestaat dan uit twee expliciet uit te rekenen krommes  $\lambda = \lambda_\pm(k)$  in het complexe vlak.

Als  $(U^*(\xi), V^*(\xi))$  een periodiek vegetatiepatroon is, is het lineaire systeem periodiek in  $\xi$ . Met behulp van Floquet–Bloch-theorie kan worden aangetoond dat het spectrum van (4) bestaat uit een collectie van oneindig veel niet noodzakelijk gladde beelden van de eenheidsdriehoek  $S^1$ . Ook hier is in het algemeen moeilijk een vinger achter te krijgen, maar kan de singuliere structuur van het systeem worden uitgebuit om tot een expliciete analytische karakterisering van het spectrum te komen [12]. Het belangrijkste verschil tussen spectra van periodieke en homogene patronen is dat er vanwege translatiesymmetrie altijd een spectrale kromme is die door de oorsprong  $(\lambda, k) = (0, 0)$  gaat. Dit betekent dat periodieke patronen (op  $\mathbb{R}$ ) niet exponentieel stabiel zijn, maar op zijn best ‘diffusief stabiel’ (verstoringen nemen af als oplossingen van de warmtevergelijking) [17]. Omdat de spectrale krommen symmetrisch zijn onder  $k \rightarrow -k$  is er dus ook een speciale, robuuste manier waarop een periodiek patroon instabiel kan worden: door verandering van de kromming van de spectrale kromme door  $\lambda = 0$ . Dit is een zogenaamde *sideband-instabiliteit*, die een belangrijke rol speelt in de dynamica van vegetatiepatronen (zie Figuur 4).

**Ontstaan van patronen en Busse-ballon**

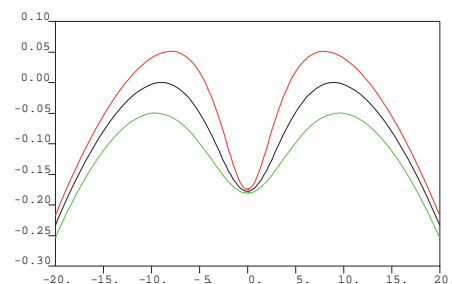
Uit de hierboven geschetste berekeningen volgt dat de ‘desert state’  $(U^0, V^0) = (1, 0)$  altijd stabiel is. Het homogene-begroeiings-evenwicht  $(U^-, V^-)$  is altijd instabiel,  $(U^+, V^+)$  is stabiel bij voldoende regenval. Als de regenval-parameter  $A$  afneemt dan wordt bij de bifurcatiewaarde  $A = A_{TH}$  ook  $(U^+, V^+)$  instabiel. Voor  $A = A_{TH}$  raakt de spectrale tak  $\Re(\lambda_\pm(k))$  in de ‘meest kritische golfgetallen’

$k = \pm k_{TH}$  aan de  $\{\Re(\lambda) = 0\}$ -as; voor  $A$  iets onder  $A = A_{TH}$  zijn er twee continue intervallen van  $k$ -waarden waarvoor  $\frac{2\pi}{k}$ -periodieke verstoringen exponentieel groeien (zie Figuur 5). Omdat  $\lambda(k_{TH})$  in het algemeen (puur) imaginair is, zullen deze verstoringen zowel tijds- als ruimtelijk periodiek zijn: het zijn lopende golven. Als  $\lambda(k_{TH}) = 0$  staan de golven stil en wordt de bifurcatie een Turing-bifurcatie genoemd — dit is het geval bij een vlak terrein, ofwel als  $C = 0$  in (1). Op hellende terreinen is er sprake van een Turing–Hopf-bifurcatie.

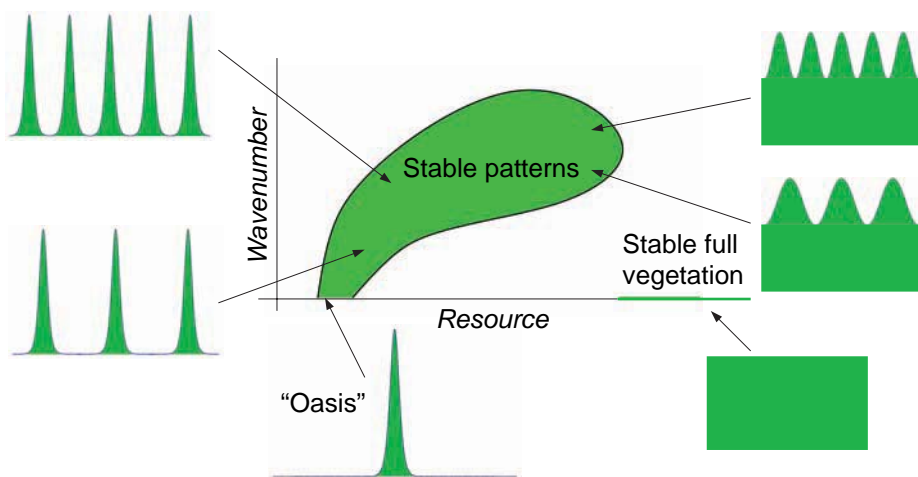
De lineaire aanpak suggereert dus dat er ruimtelijk periodieke patronen met golfgetallen dichtbij  $k = k_{TH}$  zullen ontstaan als  $A$  de waarde  $A_{TH}$  passeert. Of dit daadwerkelijk het geval is wordt bepaald door niet-lineaire effecten: alleen als de bifurcatie superkritisch is, is de lineaire ‘intuïtie’ correct, bij een subkritische bifurcatie ontstaan dergelijke patronen in het algemeen niet. Met *Ginzburg–Landau-theorie* kan het karakter van de bifurcatie worden bepaald, en tevens welke van de bifurkerende ‘golftreinen’ stabiel is en welke niet [9]. In [18] is aangetoond dat de Turing–Hopf-bifurcatie in (1) altijd superkritisch is en dat er een continue familie van stabiele golftreinen ontstaat als  $A$  de waarde  $A_{TH}$  passeert.

In de woestijncontext betekent de Turing–Hopf-bifurcatie dat er periodieke vegetatiepatronen ontstaan vanuit een volledig begroeid terrein. Dichtbij  $A_{TH}$  hebben deze nog niet de typische structuur van kale grond afgewisseld met vegetatie, maar moet men eerder denken aan een begroeiing met periodiek variërende dichtheid. Met name door de singuliere structuur van het model neemt de familie van stabiele vegetatiepatronen bij afnemende  $A$  snel de vorm aan die men verwacht.

De *Busse-ballon* is gedefinieerd als het gebied in (parameter  $A$ , golfgetal  $\kappa$ )-ruimte waarvoor (1) stabiele periodieke oplossingen heeft, de *waanbare* vegetatiepatronen. Zie Figuur 6 voor een schets. Merk hierbij op dat het ‘niet-lineaire golfgetal’  $\kappa$  conceptueel



Figuur 5 De kromme  $\lambda_+(k)$  uit het spectrum van  $(U^+, V^+)$  in het  $(k, \Re(\lambda(k)))$ -vlak voor  $A > A_{TH}$  (stabiel, groen),  $A \approx A_{TH}$  (zwart) en  $A < A_{TH}$  (instabiel, rood);  $C = B = 0,2$ ,  $\delta^2 = 0,001$ ,  $\gamma = 2$ .



**Figuur 6** Schets van een typische reactie-diffusie-Busse-ballon

verschilt van het lineaire golfgetal  $k$  in bovenstaande stabiliteitsanalyse.

Veruit het grootste deel van de Busse-ballon kan in het algemeen niet analytisch worden bepaald. Er is een classificatie mogelijk van het karakter van de rand van de Busse-ballon [14], maar er is nog bijzonder weinig bekend over de structuur ervan. Zelfs het betrouwbaar bepalen van deze rand met numerieke continuatieprogramma's is een subtiële aangelegenheid, die op zich het onderwerp van wiskundig onderzoek is [13]. Opvallend aan Busse-ballonnen voor reactie-diffusievergelijkingen van type (1) is dat deze zich uitstrekken tot de rand  $\kappa = 0$ . Met andere woorden, patronen met een geïsoleerde homocliene puls — oases in de ecologische context — spelen een belangrijke rol bij het begrijpen van de Busse-ballon. Juist deze patronen kunnen in het singuliere geval wél analytisch worden bestudeerd. Onderzoek

hieraan heeft tot een intrigerende wiskundige spin-off geleid: de rand van de Busse-ballon heeft in de buurt van de homocliene oase een fijnstructuur van twee om elkaar heen draaiende en elkaar aftelbaar vaak doorsnijdende Hopf-bifurcatiekrommen [3, 18]. En passant is ook een vermoeden uit de literatuur van Ni [10] gevalideerd, dat, in ecologische bewoeding, claimt dat oases de stabielste patronen zijn die dus als laatste zullen destabiliseren. Dus hoewel de Busse-ballon in het algemeen zeer moeilijk analytisch te begrijpen is, is er verrassend genoeg zowel bij het ontstaan van patronen — de Turing-Hopf-neus —, als bij het definitief verdwijnen ervan — de homocliene oases — wel degelijk analyse mogelijk.

**Bijlarten in de Busse-ballon**

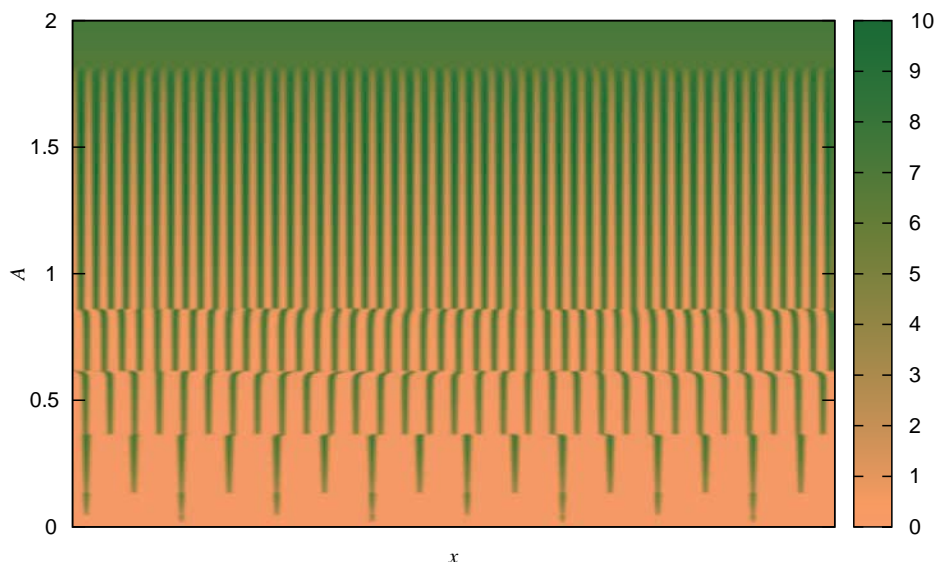
Nu we het gebied van alle mogelijk waarneembare vegetatiepatronen, de Busse-ballon, kennen, kunnen we proberen te begrijp

pen hoe (1) reageert op een langzaam veranderend klimaat, ofwel, wat er gebeurt als  $A$  langzaam gaat afnemen in de tijd. Zie Figuur 7 voor een numerieke simulatie.

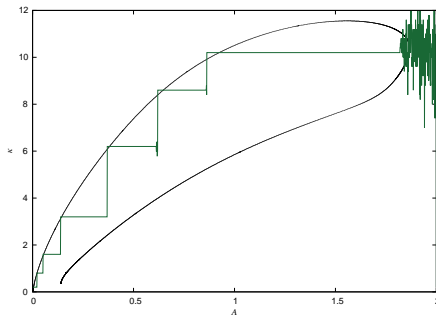
Wat opvalt is dat de verwoestijningscatastrofe voorafgegaan wordt door een aantal 'mini-catastrofes' waarbij het vegetatiepatroon 'opeens' een ander golfgetal aanneemt. Tevens blijkt het systeem bij simulaties niet de meest stabiele oase te bereiken: verwoestijning vindt net als in de realiteit al eerder plaats bij een periodiek patroon. De cruciale rol van de Busse-ballon wordt duidelijk als we de baan van een simulatie door de Busse-ballon plotten (zie Figuur 8).

De mini-catastrofes vinden plaats als deze baan de rand van de Busse-ballon raakt of doorsnijdt: het patroon wordt door de rand naar beneden gekaatsd. Dit kaatsen is uitstekend te begrijpen, buiten de Busse-ballon zijn tenslotte geen stabiele vegetatiepatronen. Een in essentie onbeantwoorde vraag is wélk patroon (golfgetal) wordt aangenomen ná dit kaatsen. Omdat veruit het grootste deel van de rand van de Busse-ballon bestaat uit patronen die door het sideband-mechanisme instabiel worden, komt begrijpen hiervan neer op inzicht in de dynamica van patronen in de buurt van een sideband-instabiliteit onder langzaam veranderende omstandigheden.

Uit computersimulaties blijkt dat het veranderingsproces gevoelig afhangt van de snelheid waarmee de regenval-parameter  $A$  varieert. Als deze snelheid (relatief) hoog is, dan neemt de voorspellende waarde van de Busse-ballon af: in systemen als (1) wordt de sideband-instabiliteit typisch gevolgd door een periode-verdubbelingsdestabilisatie die lineair sterker groeit en dus zal domineren. Voor nog hogere snelheden is aanpassing helemaal niet meer mogelijk en zal verwoestijning meteen plaatsvinden bij het golfgetal  $\kappa = k_{TH}$  van de Turing-Hopf-bifurcatie. Dit wordt in de realiteit echter niet waargenomen. Ook de hoeveelheid aan het systeem toegevoegde ruis heeft een significante invloed op de dynamica: grofweg kan gezegd worden dat het systeem dichter in de buurt van de rand van de Busse-ballon blijft als de hoeveelheid ruis toeneemt. Ook dit is wiskundig nog niet begrepen. Tot slot is het nog geheel onduidelijk wat de precieze mechanismen zijn die aanleiding geven tot de laatste verwoestijningsstap: de baan van het periodieke patroon raakt de rand van de Busse-ballon maar 'kaatst' niet meer. In plaats daarvan verlaat hij de Busse-ballon definitief om 'neer te slaan' in het enige overgebleven stabiele patroon  $(U^0, V^0)$ , de woestijn. Omdat deze stap plaatsvindt in het



**Figuur 7** De dynamica van vegetatiepatronen bij langzaam afnemende  $A$  (begroeide gebieden zijn donker/groen). In de simulatie is een kleine (ruimtelijke) stochastische verstoring toegevoegd aan het deterministische systeem (1).



**Figuur 8** Biljarten in de Busse-ballon. De baan geeft het dominante golfgetal van het bovenstaande evoluerende vegetatiepatroon aan.

gebied waar asymptotische analyse mogelijk lijkt, is er hoop dat dit proces binnenkort beter begrepen zal worden.

### Terug naar de woestijn

De belangrijkste vraag is natuurlijk: “Wat kan

het opgebouwde wiskundig inzicht in de dynamica van eenvoudige patronen in het een-dimensionale model (1) nu betekenen voor een beter begrip van verwoestijning?”

Het is duidelijk dat (1) niet direct gebruikt kan worden om kwantitatieve voorspellingen te doen over de overlevingskans van bestaande begroeiing aan de rand van een woestijn. Daarvoor zijn veel realistischere modellen nodig. Echter, inzicht in de dynamica van patronen in vereenvoudigingen als (1) geeft wel fundamenteel inzicht in de verwoestijnings-catastrofe. Wiskundig gezien blijkt de catastrofe direct gerelateerd te zijn aan het onder afnemende regenval, of toenemende stress, ‘verlaten’ van de Busse-ballon horende bij het model. De ‘afstand’ tussen een patroon en de rand van de Busse-ballon zou wellicht gezien kunnen worden als een soort maat voor de kans op verwoestijning, maar dat is bij een

langzaam veranderend klimaat waarschijnlijk een veel te grove maat. In de realiteit is het door de vanzelfsprekende aanwezigheid van stochastische effecten zelfs aannemelijk dat waargenomen vegetatiepatronen zich meestal dichtbij van de rand van de Busse-ballon zullen bevinden. De echte vraag blijft dus wat een model of een echt systeem er uiteindelijk toe brengt om te biljarten en vervolgens al dan niet de Busse-ballon te verlaten. ←

### Dankwoord

Dit onderzoek aan vegetatiepatronen en verwoestijning is mogelijk gemaakt met steun vanuit het NWO-programma Complexity.

### Referenties

- 1 F.H. Busse, Nonlinear properties of thermal convection, *Rep. Prog. Phys.* 41 (1978), 1929–1967.
- 2 A. Doelman, T. J. Kaper en P. Zegeling, Pattern formation in the one-dimensional Gray-Scott model, *Nonlinearity* 10 (1997), 523–563.
- 3 A. Doelman, J.D.M. Rademacher en S. van der Stelt, Hopf dances near the tips of Busse balloons, *Discr. Cont. Dyn. Syst. (S)* 5(1) (2012), 61–92.
- 4 E. Gilad, J. von Hardenberg, A. Provenzale, M. Shachak en E. Meron, Ecosystem engineers: from pattern formation to habitat creation, *PRL* 93(9) (2004), 098105.
- 5 P. Gray en S.K. Scott, Autocatalytic reactions in the isothermal, continuous stirred tank reactor - oscillations and instabilities in the system  $A + 2B \rightarrow 3B$ ;  $B \rightarrow C$ , *Chem. Eng. Sc.* 39 (1984), 1087–1097.
- 6 B.J. Kealy en D.J. Wollkind, A nonlinear stability analysis of vegetative Turing pattern formation for an interaction-diffusion plant-surface water model system in an arid flat environment, *Bull. Math. Biol.* 74 (2012), 803–833.
- 7 C.A. Klausmeier, Regular and irregular patterns in semi-arid vegetation, *Science* 284 (1999), 1826–1828.
- 8 M. Meyries, J.D.M. Rademacher en E. Siero, preprint (2013).
- 9 A. Mielke, The Ginzburg-Landau equation in its role as modulation equation, in *Handbook of Dynamical Systems, II*, (ed. B. Fiedler) (2002), 759–835.
- 10 W.-M. Ni, Diffusion, cross-diffusion, and their spike-layer steady states, *Not. AMS* 45(1) (1998), 9–18.
- 11 J. E. Pearson, Complex patterns in a simple system, *Science* 261 (1993), 189–192.
- 12 H. van der Ploeg en A. Doelman, Stability of spatially periodic pulse patterns in a class of singularly perturbed reaction-diffusion equations, *Ind. Univ. Math. J.* 54(5) (2005), 1219–1301.
- 13 J.D.M. Rademacher, B. Sandstede en A. Scheel, Computing absolute and essential spectra using continuation, *Phys. D* 229(2) (2007), 166–183.
- 14 J.D.M. Rademacher en A. Scheel, Instabilities of wave trains and Turing patterns in large domains, *Int. J. Bif. Chaos* 17(8) (2007), 2679–2691.
- 15 M. Rietkerk, M.C. Boerlijst, F. van Langevelde, R. Hillerislambers, J. van de Koppel, L. Kumar, H.H.T. Prins en A.M. de Roos, Self-Organization of Vegetation in Arid Ecosystems, *The American Naturalist* 160(4) (2002), 524–530.
- 16 M. Rietkerk, S.C. Dekker, P.C. de Ruiter en J. van de Koppel, Self-organized patchiness and catastrophic shifts in ecosystems, *Science* 305, (2004) 5692.
- 17 B. Sandstede, A. Scheel, G. Schneider en H. Uecker, *J. Diff. Eqns.* 252 (2012), 3541–3574.
- 18 S. van der Stelt, A. Doelman, G. Hek en J.D.M. Rademacher, Rise and fall of periodic patterns for a Generalized Klausmeier-Gray-Scott model, *J. Nonl. Sc.* 23(1) (2012), 39–95.
- 19 J. Von Hardenberg, E. Meron, M. Shachak en Y. Zarmi, Diversity of Vegetation Patterns and Desertification *PRL* 87(19) (2001), 198101.